Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

**4-5 класс**

**4-5.1.** В классе учиться 29 учеников. Сумма их возрастов равна 342. А чему будет равна сумма их возрастов ровно через 3 года? Ответ объясните.

**Ответ:** 429 лет.

***Решение.*** Возраст каждого из учеников увеличится на 3. Значит, сумма возрастов вырастет на лет. Поэтому вместе им будет лет.

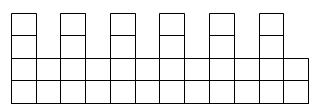
**Критерии.**

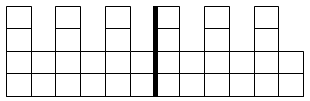
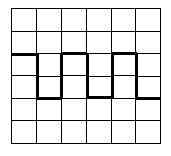
**2 балла.** Только правильный ответ без объяснений.

**6 баллов.** Решение верное, но допущена одна арифметическая ошибка.

**0 баллов.** Нет ответа или ответ неправильный.

**4-5.2.** Сложите квадрат, разделив фигуру на две части. Покажите, как разрезать и как сложить.



**Ответ:**  и .

**Критерии.**

**7 баллов.** Правильный ответ.

**5 баллов.** Неполное решение (верно показано только, как разрезать фигуру или как сложить квадрат).

**0 баллов.** Нет ответа или ответ неправильный.

**4-5.3.** Восстановите поврежденные записи арифметических действий, то есть замените звездочками цифрами так, чтобы получилось верное равенство:



**Ответ:** .

**Критерии.**

**7 баллов.** Правильный ответ.

**0 баллов.** Нет ответа или ответ неправильный.

**4-5.4.** Первую среду месяца Серёжа провёл в Сочи, а первую среду после первого вторника – в Хабаровске. В следующем месяце Серёжа первую среду провёл в Москве, а первую среду после первого вторника – в Санкт-Петербурге. Сможете ли вы определить, какого числа и какого месяца Серёжа был в каждом из городов? (В один день Серёжа может побывать только в одном городе.)

**Ответ:** В Сочи – 1 февраля, в Хабаровске – 8 февраля, в Москве – 1 марта, в Санкт-Петербурге – 8 марта.

***Решение.*** Поскольку Серёжа не мог провести один и тот же день и в Сочи, и в Хабаровске, значит, месяц начинался в среду (ведь иначе первая среда и первая среда после первого вторника совпали бы). Аналогично заключаем, что и второй месяц должен начинаться в среду. Это возможно только в случае, когда один месяц – февраль, а другой – март, причём год невисокосный. Отсюда уже легко получить, что в Сочи Серёжа был 1 февраля, в Хабаровске – 8 февраля, в Москве – 1 марта, в Санкт-Петербурге – 8 марта.

**Критерии.**

**7 баллов.** Правильный ответ с обоснованием.

**0 баллов.** Нет ответа или ответ неправильный.

*Комментарий.*Баллы по критериям ниже суммируются.

**2 балла.** Указано, что месяц начинается со среды.

**3 балла.** Указано, что первый месяц – февраль.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

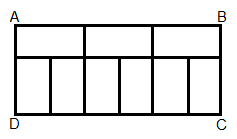
**6 класс**

**6.1.** В трёх двузначных слагаемых все цифры различны. Какая наибольшая сумма могла получиться? Ответ объясните.

**Ответ:** 255.

***Решение.*** Чем больше цифры в разряде десятков, тем больше конечная сумма. Значит, в разряде десятков стоят цифры 9, 8 и 7. Аналогично с разрядом единиц. В разряде единиц стоят цифры 6, 5 и 4. Например, 96+85+74=95+84+76=255. Всего 6 вариантов. Но сумма всегда равна 90+80+70+6+5+4=255.

**Критерии.**

** 2 балла.** Верный ответ без обоснования.

**6.2.** На рисунке изображен прямоугольник, сложенный из девяти одинаковых прямоугольников. Известно, что м. Найдите площадь прямоугольника .

**Ответ:** 882 м2.

***Решение.*** Сторона состоит из 6 маленьких одинаковых сторон равных прямоугольников (из которых сложен большой), значит, эта маленькая сторона равна (м). Так как (в прямоугольнике противоположные стороны равны), значит три больших стороны прямоугольника, из которых сложен большой, тоже дают м, то есть эта большая сторона равна (м). Наконец складывается из одной большой и одной маленькой стороны, то есть она равна (м). Таким образом, площадь равна (м2).

**Критерии.**

**3 балла.** Правильный ответ без достаточных обоснований.

**3 балла.** Верно найдены стороны маленького прямоугольника.

**6 баллов.** Решение верно, но неверно указаны единицы измерения.

**6.3.** В трёх альбомах лежат 168 фотографии. Из первого альбома вынули всех лежащих в нём фотографий и разделили на две части и . Первую часть переложили во второй альбом, а вторую часть – в третий. После этого во всех трёх альбомах фотографий стало поровну. Сколько фотографий было в каждом альбоме?

**Ответ:** 91, 35 и 42 фотографии соответственно.

***Решение.***  Если переложить фотографии так, как сказано в условии, то во всех альбомах фотографий станет поровну, то есть по фотографий. В первом альбоме осталось от того, что было. Значит, первоначально в первом альбоме было фотография. часть – это фотографий. Во втором альбоме было фотографий, а в третьем фотографии.

*Комментарий.* Возможно и другое правильное решение для нахождения фотографий во втором и третьем альбоме.

**Критерии.**

**0 баллов.** Правильный ответ без решения.

**1 балл**. Верно найдено количество фотографий в каждом альбоме после перекладывания.

**6 баллов.** Решение в целом верно, но допущена одна арифметическая ошибка.

**6.4.** Докажите, что из 2019 полосок бумаги шириной 1 и длинами 1, 2, …, 2019 можно составить прямоугольник, ширина и длина которого больше 1. (Использовать все полоски обязательно. Накладывать полоски друг на друга нельзя.)

***Решение 1.*** Сделаем прямоугольник длиной 2019. Для этого в первой строке расположим полоску длины 2019, во второй — полоски длины 1 и 2018, в третьей — 2 и 2017, и т.д. Мы выкладываем пары с суммой 2019. Не считая числа 2019, у нас 2018 чисел, т.е. будет 1009 пар, первая из которых — 1 и 2018, вторая — 2 и 2017, а 1009-ая — 1009 и 1010.

***Решение 2.*** Сумма всех длин равна Значит, можно составить прямоугольник размером . Для этого в первой строке расположим полоску длины 2019, во второй — полоски длины 1 и 2018, в третьей — 2 и 2017, и т.д. в 1009-ой — 1009 и 1010.

**Критерии.**

**7 баллов.** Приведён пример как из всех полосок сложить прямоугольник, ширина и длина которого больше 1.

**1 балл.** Найдена сумма всех длин полосок и число разложено на множители, но алгоритма построения прямоугольника нет.

*Комментарий.* Порядок строк в примере может быть любым.

Школьный тур всероссийской олимпиады школьников по математике

**7 класс**

**7.1.** Имеются цифры 1, 2, 3, 4. Сколько различных чисел, кратных 12 можно из них составить? При составлении числа каждую цифру можно использовать один раз или не использовать совсем.

**Ответ:** 6 чисел.

***Решение.*** Числа, кратные 12 должны делиться на 3 и на 4, то есть сумма цифр должна делиться на 3, а две последние цифры (идущие в том же порядке), образовывать число, которое делится на 4. Число делится на 4, а значит и на 2, поэтому в разряде единиц может стоять только чётная цифра. Можно составить следующие двузначные числа (12, 32, 42, 14, 24, 34), но делящиеся на 4 из них только три (12, 32, 24). А на 3 делятся из них только два – 12 и 24. Четыре трехзначных числа можно получить из двузначных, которые делятся на 4, подобрав неиспользованную цифру в разряд сотен – 312, 324, 132, 432. Четырехзначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4, делящихся на 12, составить нельзя, так как 1+2+3+4=10 не делится на 3. Всего 6 чисел.

**Критерии.**

**0 баллов.** Только верный ответ.

**3 балла.** Указаны все шесть чисел и дан верный ответ.

**7.2.** В районе три села: Истинск, Вруново и Итакисякск. Жители Истинска всегда говорят правду, Вруново лгут, а жители Итакисякска строго попеременно лгут и говорят правду. Пожарным позвонили из одного села:

- У нас пожар!

- Где горит?

- В Итакисякске.

Пожарные уверены, что пожар есть. Куда им ехать?

**Ответ:** в Истинск.

***Решение.*** Информация о пожаре – правда. Сделаем перебор по месту откуда мог быть звонок.

1) Звонок из Истинска. Тогда ответ на вопрос "Где горит?" – ложь, а жители Истинска всегда говорят правду. Значит такой вариант невозможен.

2) Звонок из Вруново. Значит жители Вруново соврали, что пожар у них, значит, пожар либо в Истинске, либо в Итакисякске. Ответ на вопрос "Где горит?" ("В Итакисякске"), означает, что в Итакисякске нет пожара, значит, пожар в Истинске.

3) Звонок из Итакисякска. Тогда исходя из условия следует, что оба высказывания либо правда, либо ложь. А жители этого города говорят правду и лгут строго попеременно. Значит такой вариант невозможен.

**Критерии.**

**0 баллов.** Только верный ответ.

**3 балла.** Доказано, что звонок из Вруново.

**2 балла** за каждый случай**.** Доказано, что звонить из Истинска или Итакисякска не могли.

**7.3.** В трёх альбомах лежат 168 фотографии. Из первого альбома вынули всех лежащих в нём фотографий и разделили на две части и . Первую часть переложили во второй альбом, а вторую часть – в третий. После этого во всех трёх альбомах фотографий стало поровну. Сколько фотографий было в каждом альбоме?

**Ответ:** 91, 35 и 42 фотографии соответственно.

***Решение.***  Если переложить фотографии так, как сказано в условии, то во всех альбомах фотографий станет поровну, то есть по фотографий. В первом альбоме осталось от того, что было. Значит, первоначально в первом альбоме было фотография. часть – это фотографий. Во втором альбоме было фотографий, а в третьем фотографии.

*Комментарий.* Возможно и другое правильное решение для нахождения фотографий во втором и третьем альбоме.

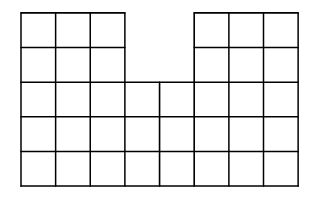
**Критерии.**

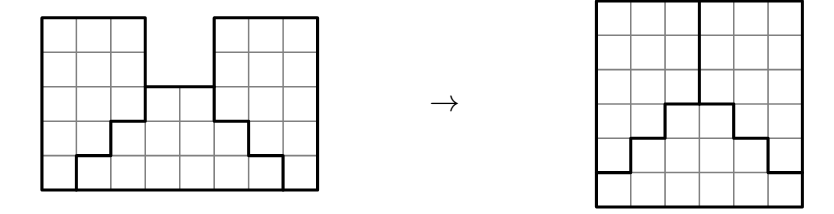
**0 баллов.** Правильный ответ без решения.

**1 балл**. Верно найдено количество фотографий в каждом альбоме после перекладывания.

**6 баллов.** Решение в целом верно, но допущена одна арифметическая ошибка.

**7.4.** Покажите, как разрезать приведённую ниже фигуру на три части и сложите из этих частей квадрат. Резать можно только по линиям сетки. Части могут получиться разными.



**Ответ:** например,

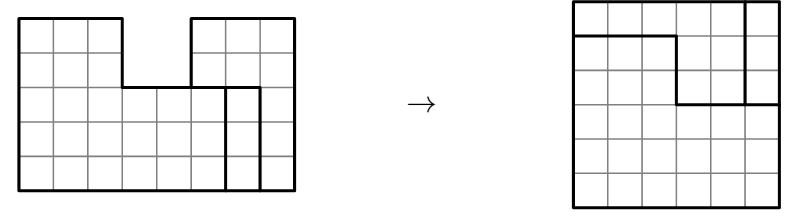
**Критерии.**

**7 баллов.** Любое верное решение (на рисунках показано, как разрезать фигуру и как складывать квадрат).

**5 баллов.** Неполное решение (верно показано только, как разрезать фигуру или как сложить квадрат).

**0 баллов.** Неверное решение.

*Комментарий.* Возможны примеры с переворотом некоторых частей:



Возможны и другие решения*.*

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

**8 класс**

**8.1.** Имеется 30 бревен длинами 3 м и 4 м, суммарная длина которых равна 100 м. Каким числом распилов можно распилить бревна на чурбаки длиной 1 м? (Каждым распилом пилится ровно одно бревно). Ответ обосновать.

**Ответ:** 70 распилов.

***Решение 1.*** Сложим все бревна в одно, длиной 100 м. Чтобы его распилить на чурбаки по 1 м необходимо сделать 99 распилов, из которых 29 уже было сделано (так как брёвен 30). Число распилов 99 – 29 = 70.

***Решение 2.*** Если было *m* бревен 3 метровых и *n* бревен 4 метровых, то   
 Откуда получаем . Тогда число распилов равно .

**Критерии.**

**7 баллов.** Полное обоснованное решение.

**2 балла.** Верно составлена система уравнений.

**1 балл.** Приведен только верный ответ.

**8.2.** Из чисел , и одно положительно, одно отрицательно и одно равно 0. Известно, что Какое из чисел положительно, какое отрицательно и какое равно нулю? Ответ объясните.

**Ответ:**  – отрицательно, – положительно, равно нулю.

***Решение.*** Если , то либо , либо . По условию ни то, ни другое невозможно. Поэтому . Если , то и . Это тоже невозможно. Поэтому . Следовательно, , и равенство из условия задачи можно переписать в виде Отсюда следует, что . Значит, положительно, а – отрицательно.

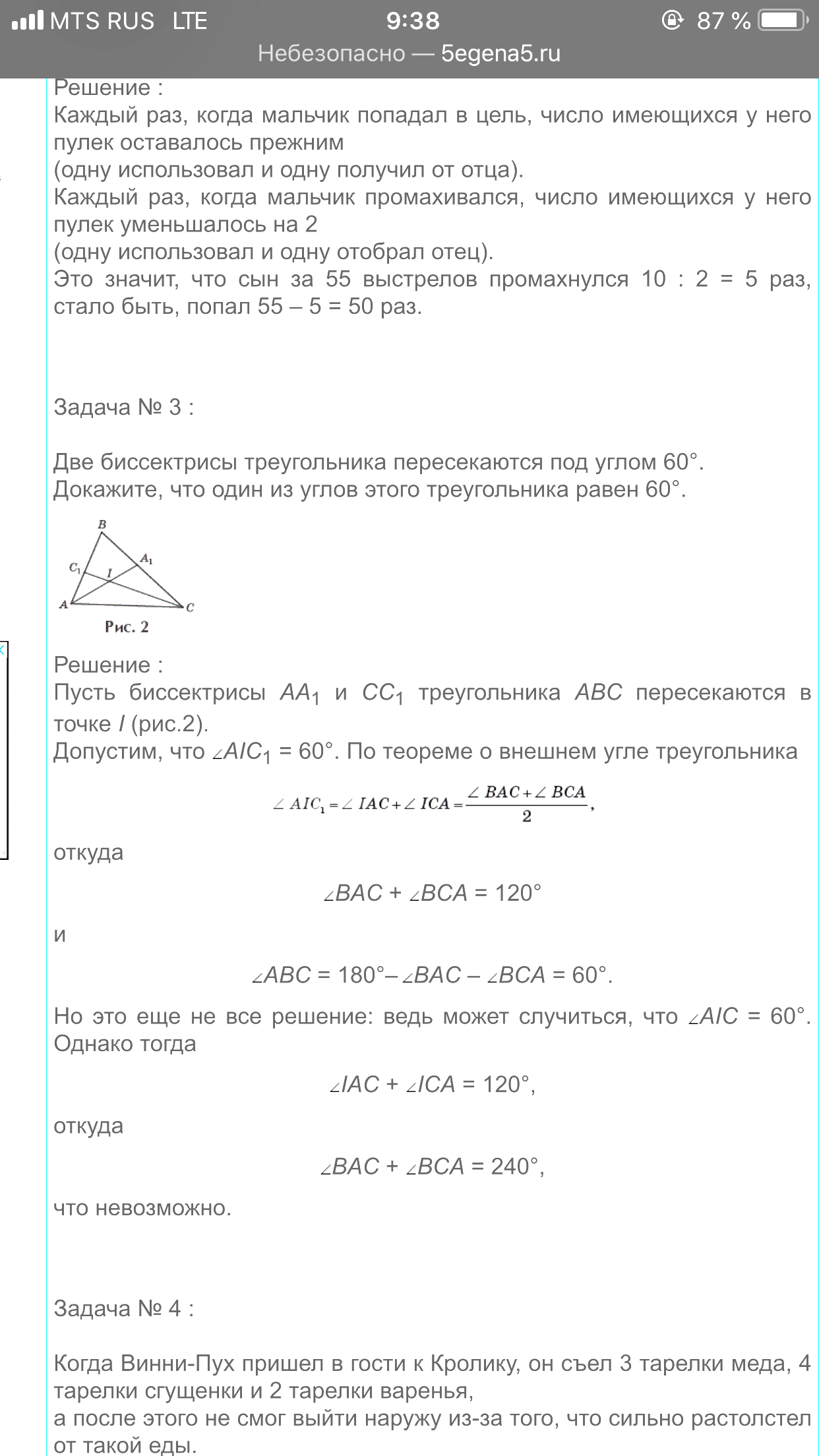
**Критерии.**

**7 баллов.** Полное обоснованное решение.

**2 балла.** Доказано, что равно нулю.

**0 баллов.** Приведен только ответ.

**8.3.** Две биссектрисы треугольника пересекаются под углом 60º. Докажите, что один из углов этого треугольника равен 60º.

***Решение.*** Пусть биссектрисы и треугольника пересекаются в точке .

1 случай. Допустим, что . По теореме о внешнем угле треугольника получим:

Откуда и

2 случай. Но это еще не все решение: ведь может случиться, что =600.

Однако, тогда , откуда , что невозможно.

**Критерии.**

**7 баллов.** Полное обоснованное решение.

**5 баллов.** Рассмотрен 1 случай.

**2 балл.** Рассмотрен 2 случай.

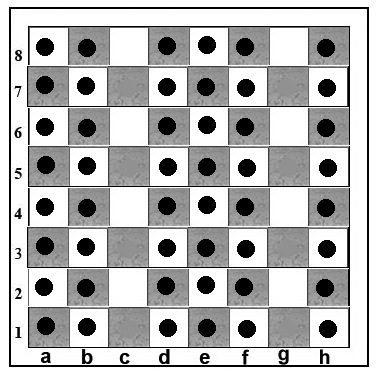
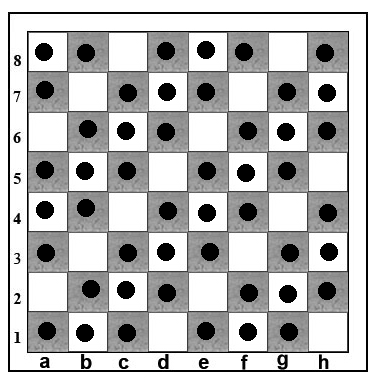
**8.4.** Какое минимальное число шашек надо взять, чтобы при любой их расстановке на клетках **шахматной доски** (8×8) обязательно встретились 4 шашки, стоящие друг за другом по горизонтали?

**Ответ:** 49 шашек.

***Решение.***

*Оценка.* Чтобы на горизонтали не было 4 шашек подряд, на ней должно быть не более 6 шашек. То есть необходимо шашек.

*Пример.* Покажем, что 48 может быть недостаточно.

 или **.

*Комментарий.* Возможны другие примеры.

**Критерии.**

**7 баллов.** Полное обоснованное решение (пример и оценка).

**3 балла.** Приведен пример, что 48 недостаточно.

**3 балла.** Доказано, что 49 шашек хватит.

*Комментарий.* Правильная оценка может быть получена с помощью принципа Дирихле или методом доказательства от противного.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

**9 класс**

**9.1.** В слове МАТЕМАТИКА замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами так, чтобы получилось наименьшее возможное десятизначное число, кратное 90. Ответ объясните.

**Ответ:** 1023102450.

***Решение.*** Числа, кратные 90 должны делиться на 9 и на 10, то есть сумма цифр должна делиться на 9, а последние цифра – 0. То есть А – 0. Чем меньше цифра в более левом разряде, тем меньше само число. М не может быть нулем, следовательно, М – 1. Из аналогичных рассуждений Т – 2, а E – 3. Получим число . Сумма цифр этого числа должна делиться на 9. Значит делится на 9. Так как цифры от 0 до 3 уже заняты (и цифры различны), то . Искомое число – 1023102450.

**Критерии.**

**0 баллов.** Только правильный ответ без обоснования.

**4 балла.** Приведен ответ без достаточных обоснований.

**9.2.** Докажите, что из 2019 полосок бумаги шириной 1 и длинами 1, 2, …, 2019 можно составить прямоугольник, ширина и длина которого больше 1. (Использовать все полоски обязательно. Накладывать полоски друг на друга нельзя.)

***Решение 1.*** Сделаем прямоугольник длиной 2019. Для этого в первой строке расположим полоску длины 2019, во второй — полоски длины 1 и 2018, в третьей — 2 и 2017, и т.д. Мы выкладываем пары с суммой 2019. Не считая числа 2019, у нас 2018 чисел, т.е. будет 1009 пар, первая из которых — 1 и 2018, вторая — 2 и 2017, а 1009-ая — 1009 и 1010.

***Решение 2.*** Сумма всех длин равна Значит, можно составить прямоугольник размером . Для этого в первой строке расположим полоску длины 2019, во второй — полоски длины 1 и 2018, в третьей — 2 и 2017, и т.д. в 1009-ой — 1009 и 1010.

**Критерии.**

**7 баллов.** Приведён пример как из всех полосок сложить прямоугольник, ширина и длина которого больше 1.

**1 балл.** Найдена сумма всех длин полосок и число разложено на множители, но алгоритма построения прямоугольника нет.

*Комментарий.* Порядок строк в примере может быть любым.

**9.3.** Квадрат расстояния между корнями квадратного трехчлена равен . Найдите коэффициенты и , если известно, что они являются простыми числами.

**Ответ:** .

***Решение****.* Квадрат расстояния между корнями трехчлена равен

.

Получаем . Оба множителя, стоящих в левой части, – четные, и один из них делится на 4, поэтому делится на 8. Поскольку простое, , откуда .

**Критерии.**

**2 балла.** Квадрат расстояния выражен через и . Дальнейшие продвижения отсутствуют.

**9.4.** Дан треугольник *.* Через точку проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла и пересекающая прямую в точке *.* Через точку также проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла и пересекающая прямую в точке . Найдите , если = 9, = 2.

**Ответ:** 7 или 11.

***Решение.*** Пусть точка  расположена на стороне  треугольника  Треугольники  и  – равнобедренные (биссектриса, проведённая из вершины *B*, является высотой), поэтому  . Если точка  расположена на продолжении отрезка за точку *C*, то аналогично находим, что  .

**Критерии.**

**0 баллов.** Только правильный ответ без обоснования.

**4 балла.** Обосновано получен лишь один из верных ответов.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

**10 класс**

**10.1.** В слове МАТЕМАТИКА замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные буквы – разными цифрами так, чтобы получилось наименьшее возможное десятизначное число, кратное 90. Ответ объясните.

**Ответ:** 1023102450.

***Решение.*** Числа, кратные 90 должны делиться на 9 и на 10, то есть сумма цифр должна делиться на 9, а последние цифра – 0. То есть А – 0. Чем меньше цифра в более левом разряде, тем меньше само число. М не может быть нулем, следовательно, М – 1. Из аналогичных рассуждений Т – 2, а E – 3. Получим число . Сумма цифр этого числа должна делиться на 9. Значит делится на 9. Так как цифры от 0 до 3 уже заняты (и цифры различны), то . Искомое число – 1023102450.

**Критерии.**

**0 баллов.** Только правильный ответ без обоснования.

**4 балла.** Приведен ответ без достаточных обоснований.

**10.2.** Докажите, что из 2019 полосок бумаги шириной 1 и длинами 1, 2, …, 2019 можно составить прямоугольник, ширина и длина которого больше 1. (Использовать все полоски обязательно. Накладывать полоски друг на друга нельзя.)

***Решение 1.*** Сделаем прямоугольник длиной 2019. Для этого в первой строке расположим полоску длины 2019, во второй — полоски длины 1 и 2018, в третьей — 2 и 2017, и т.д. Мы выкладываем пары с суммой 2019. Не считая числа 2019, у нас 2018 чисел, т.е. будет 1009 пар, первая из которых — 1 и 2018, вторая — 2 и 2017, а 1009-ая — 1009 и 1010.

***Решение 2.*** Сумма всех длин равна Значит, можно составить прямоугольник размером . Для этого в первой строке расположим полоску длины 2019, во второй — полоски длины 1 и 2018, в третьей — 2 и 2017, и т.д. в 1009-ой — 1009 и 1010.

**Критерии.**

**7 баллов.** Приведён пример как из всех полосок сложить прямоугольник, ширина и длина которого больше 1.

**1 балл.** Найдена сумма всех длин полосок и число разложено на множители, но алгоритма построения прямоугольника нет.

*Комментарий.* Порядок строк в примере может быть любым.

**10.3.** Квадрат расстояния между корнями квадратного трехчлена равен . Найдите коэффициенты и , если известно, что они являются простыми числами.

**Ответ:** .

***Решение****.* Квадрат расстояния между корнями трехчлена равен

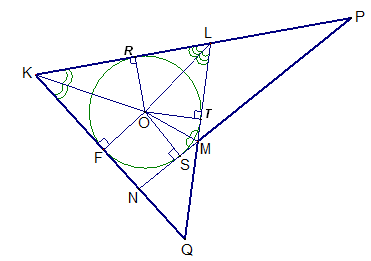
.

Получаем . Оба множителя, стоящих в левой части, – четные, и один из них делится на 4, поэтому делится на 8. Поскольку простое, , откуда .

**Критерии.**

**2 балла.** Квадрат расстояния выражен через и . Дальнейшие продвижения отсутствуют.

**10.4.** Биссектрисы углов , и выпуклого четырёхугольника пересекаются в одной точке. Лучи и пересекаются в точке , а лучи и в точке . Докажите, что суммы длин противоположных сторон невыпуклого четырёхугольника равны.

***Решение.*** Пусть точка – точка пересечения данных биссектрис. Тогда точка равноудалена от всех сторон четырёхугольника , то есть является центром окружности вписанной в четырёхугольник. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых из одной точки, верны равенства: Почленно сложим левые и правые части, получим верное равенство:; Так как , то , что и требовалось доказать.

**Критерии.**

**0 баллов.** Только правильный ответ без обоснования.

**2 балла.** Доказано, что в четырёхугольник можно вписать окружность с центром в точке пересечения биссектрис.

Школьный этап всероссийской олимпиады школьников по математике

**11 класс**

**11.1.** В книге по зельеварению каждая глава начинается с нового листа. Гарри Поттер залил волшебным зельем все листы второй главы волшебной книги. Третья глава этой книги начинается со страницы 523, а номер последней страницы перед второй главой записывается теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько листов занимает вторая глава?

**Ответ:** 85.

***Решение.*** Так как перед второй главой номер страницы записывается теми же цифрами, что и число 523, то это могут быть номера 235, 253, 325, 352, 532. Номер 532 не подходит, так как он больше номера 523. Третья глава начинается с номера 523, который является нечетным числом. Значит, номер страницы перед испорченными листами должен быть четным. Из чисел 235, 253, 325, 352 четным является число 352. Находим количество испорченных страниц 522-352=170, тогда листов 170/2=85.

**Критерии.**

**1 балл.** Исключен случай для страницы 532.

**2 балла.** Доказано, что номер последней страницы перед первой испорченной – 352.

**2 балла.** Верно найдено количество страниц.

**2 балла.** Верно найдено и указано в ответе количество испорченных листов, а не страниц.

*Комментарий.*Баллы по критериям выше суммируются.

**11.2.** Можно ли клетчатый прямоугольник 4 на 11 разрезать по границам клеток на 9 прямоугольников разной площади?

**Ответ:** нет, нельзя.

***Решение.*** Предположим, что можно. Все площади измеряются целым числом клеток. Наименьшая из площадей не меньше 1. Тогда следующая по величине площадь не меньше 2. Продолжая такие рассуждения, видим, что следующая площадь не меньше 3, потом не меньше 4 и т. д. Тем самым, сумма девяти площадей не меньше . Получили противоречие. Значит, наше предположение неверно. Разрезать нельзя.

**Критерии.**

**0 баллов.** Только правильный ответ без обоснования.

**7 баллов.** Полное верное доказательство.

**0 баллов.** Все остальные случаи.

**11.3.** При каких и многочлен без остатка делится на многочлен ?

**Ответ:** .

***Решение.*** Так как , то многочлен должен обращаться в нуль при и , то есть Решая полученную систему уравнений, находим, что . При таких значениях и многочлен делится на и на , а значит и на произведение .

**Критерии.**

**0 баллов.** Только правильный ответ без обоснования.

**4 балла.** Верно составлена система уравнений, из которой могут быть найдены и .

*Комментарий.* Система уравнений может быть составлена, исходя из того, что остаток от деления на равен нулю.

**11.4.** Дан правильный 24-угольник с центром в точке . Найдите семь различных вершин этого 24-угольника таких, что сумма векторов равна 0.

**Ответ:** Например, .

***Решение.*** Рассмотрим правильный треугольник . Его центр (точка пересечения медиан, высот, биссектрис) находится в точке В нём . Аналогично, в квадрате . Сумма рассмотренных выше сумм также равна нулю. Значит вершины – искомые.

**Критерии.**

**7 баллов.** За любой правильный набор точек.

**0 баллов.** Все остальные случаи.

*Комментарий.* Вместо квадрата можно взять две пары противоположных вершин. Эти две пары вершин и вершины правильного треугольника могут располагаться по-разному.